POJAM FUNKCIJE

§ 1. Funkcije i načini njihovog definisanja

1. Zbir unutrašnjih uglova ravnog konveksnog poligona je funkcija broja njegovih strana. Koje vrednosti može uzimati argumenat te funkcije?

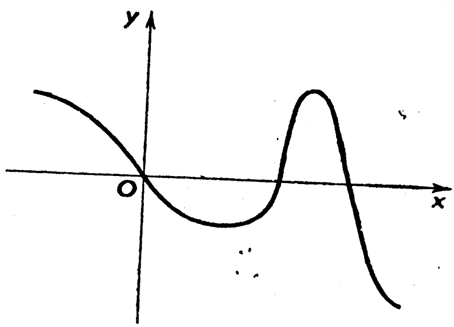
Izraziti tu funkciju analitički.

2. Funkcija y od x zadata je sledećom tablicom:

Nezavisno promenljiva x	0	0,5	1	1,5	2	3	
Funkcija y	$-1,5$	-1	0	3,2	2,6	0	
Nezavisno promenljiva x	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Funkcija y	$-1,8$	$-2,8$	0	1,1	1,4	1,9	2,4

Nacrtati njen grafik, povezujući tačke „blago zaobljenom" krivom linijom, i na osnovu grafika „upotpuniti" tablicu, odredivši vrednosti funkcije za $x=2,5$; 3,5; 4,5; 5,5; 6,5; 7,5; 8,5; 9,5.

3. Funkcija je zadata grafikom prikazanim na sl. 1. Preneti crtež na milimetarski papir, izabrati jedinični odsečak i nekoliko vrednosti nezavisno promenljive. Otčitati sa crteža vrednosti funkcije koje odgovaraju izabranim vrednostima nezavisno promenljive i sastaviti tablicu tih vrednosti.



Sl. 1

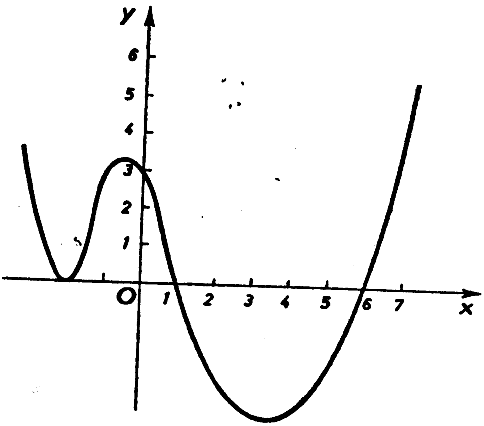
4. Funkcija je zadata grafikom prikazanim na sl. 2. Na osnovu grafika odgovoriti na sledeća pitanja:

a) Za koje je vrednosti nezavisno promenljive x vrednost funkcije nula?

b) Za koje je vrednosti nezavisno promenljive funkcija pozitivna, a za koje negativna?

5. Zavisnost sile F uzajamnog dejstva dva električna naboja e_1 i e_2 od rastojanja r između njih po Kulonovom zakonu izražava se obrascem

$$F=\frac{e_1 e_2}{\varepsilon \cdot r^2}.$$



Sl. 2

Uzimajući da je $e_1=e_2=1$ i $\varepsilon=1$ sastaviti tablicu vrednosti date funkcije za $r=1, 2, 3, \ldots, 10$ i nacrtati njen grafik povezujući dobijene tačke „blago zaobljenom" krivom.

6. Predstaviti analitički funkciju koja izražava zavisnost poluprečnika r cilindra od njegove visine h ako mu je zapreminu $V=1$. Izračunati vrednosti r za sledeće vrednosti h: 0,5; 1; 1,5; 2; 2,5; 3; 3,5; 4; 4,5; 5. Nacrtati grafik funkcije.

7. Izraziti površinu P ravnokrakog trapeza čije su paralelne strane a i b kao funciju ugla α na osnovici a. Nacrtati grafik funkcije za $a=2$, $b=1$.

8. Izraziti zavisnost katete b pravouglog trougla od druge katete a pri konstantnoj hipotenuzi $c=5$. Pokazati da je grafik ove funkcije četvrtina kružne linije.

§ 2. Simbolika i klasifikacija funkcija

Simbolika

9. Date su funkcije:

$$\text{a) } f(x)=\frac{x-2}{x+1}; \quad \text{b) } \varphi(x)=\frac{|x-2|}{x+1}.$$

Naći: $f(0)$; $f(1)$; $f(2)$; $f(-1/2)$; $f(-2)$; $f(\sqrt{2})$; $\left|f\left(\frac{1}{2}\right)\right|$; $\varphi(0)$; $\varphi(1)$; $\varphi(2)$; $\varphi(-2)$; $\varphi(4)$. Postoji li $f(-1)$? $\varphi(-1)$?

10. Data je funkcija

$$f(u)=u^3-1.$$

Naći: $f(1)$; $f(a)$; $f(a+1)$; $f(a-1)$; $2f(2a)$.

11. Date su funkcije

$$F(z)=2^{z-2} \quad \text{i} \quad \varphi(z)=2^{|z|-2}.$$

Naći: $F(0)$; $F(2)$; $F(3)$; $F(-1)$; $F(2{,}5)$; $F(-1{,}5)$. $\varphi(0)$; $\varphi(2)$; $\varphi(-1)$; $\varphi(x)$; $\varphi(-1)+F(1)$.

12. Data je funkcija

$$\psi(t)=t\cdot a^t.$$

Naći: $\psi(0)$; $\psi(1)$; $\psi(-1)$; $\psi(1/a)$; $\psi(a)$; $\psi(-a)$.

13. $\varphi(t) = t^3 + 1$. Naći: $\varphi(t^2)$ i $\varphi(t)$.

14. $F(x) = x^4 - 2x^2 + 5$. Dokazati da je $F(a) = F(-a)$.

15. $\Phi(z) = z^3 - 5z$. Dokazati da je $\Phi(-z) = -\Phi(z)$.

16. $f(t) = 2t^2 + \dfrac{2}{t^2} + \dfrac{5}{t} + 5t$. Dokazati da je $f(t) = f(1/t)$.

17. $f(x) = \sin x - \cos x$. Dokazati da je $f(1) > 0$.

18. $\psi(x) = \lg x$. Dokazati da je $\psi(x) + \psi(x+1) = \psi[x(x+1)]$.

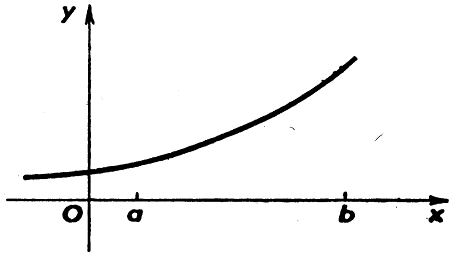
19. $F(z) = a^z$. 1) Dokazati da za svako z važi relacija

$$F(-z) \cdot F(z) - 1 = 0.$$

2) Dokazati da je

$$F(x) \cdot F(y) = F(x+y).$$

20. Dat je grafik funkcije $y = f(x)$ i vrednosti a i b nezavisno promenljive x (sl. 3). Konstruisati na crtežu vrednosti $f(a)$ i $f(b)$. Kakvo je geometrijsko značenje količnika $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$?



Sl. 3

21. Pokazati da: ako svaka tetiva grafika funkcije $f(x)$ leži iznad odgovarajućeg luka, onda važi nejednakost

$$\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} > f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \text{ za sve } x_1 \neq x_2.$$

22. Ako je: $f(x) = x^2 - 2x + 3$, naći sve korene jednačine: a) $f(x) = f(0)$; b) $f(x) = f(-1)$.

23. Ako je: $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - 23x$, naći sve korene jednačine $f(x) = f(-2)$.

24. Data je funkcija $f(x)$. Naći bar jedan koren jednačine $f(x) = f(a)$.

25. Naći dva korena jednačine

$$f(x) = f\left(\frac{x+8}{x-1}\right),$$

ako se zna da je funkcija $f(x)$ definisana u intervalu $[-5, 5]$. Naći sve korene date jednačine u slučaju kada je $f(x) = x^2 - 12x + 3$.

26. $F(x) = x^2 + 6$; $\varphi(x) = 5x$. Naći sve korene jednačine $F(x) = |\varphi(x)|$.

27. $f(x)=x+1$; $\varphi(x)=x-2$. Rešiti jednačinu

$$|f(x)+\varphi(x)|=|f(x)|+|\varphi(x)|.$$

28. Ako je $f(x)=ax^2+bx+5$ odrediti a i b tako da bude $f(x+1)-f(x)\equiv 8x+3$.

29. Neka je $f(x)=a\cdot\cos(bx+c)$. Odrediti konstante a, b i c tako da bude $f(x+1)-f(x)\equiv\sin x$.

Posredne funkcije

30. Neka je $y=z^2$, $z=x+1$; izraziti y kao funkciju od x.

31. Neka je $y=z+1$, $z=\operatorname{tg}^2 x$; izraziti y kao funkciju od x.

32. Neka je $y=z^2$, $z=\sqrt[3]{x+1}$, $x=a^t$; izraziti y kao funkciju od t.

33. Neka je $y=\sin x$, $v=\lg y$, $u=\sqrt{1+v^2}$; izraziti u kao funkciju od x.

34. Neka je $y=1+x$, $z=\cos y$, $v=\sqrt{1-z^2}$; izraziti v kao funkciju od x.

35. Sledeće funkcije predstaviti kao posredne, definisane pomoću „lanca" elementarnih funkcija:

1) $y=\sin^3 x$; 2) $y=\sqrt[3]{(1+x)^2}$; 3) $y=\lg\operatorname{tg} x$;

4) $y=\sin^3(2x+1)$; 5) $y=5^{(3x+1)^2}$.

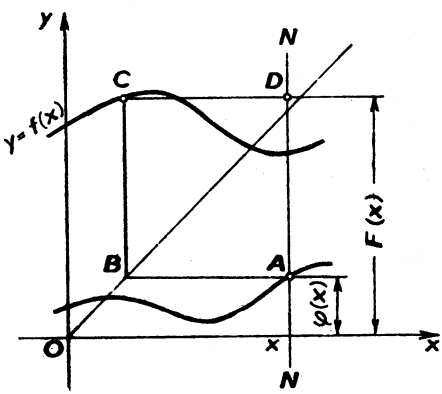
36. Ako je $f(x)=x^3-x$; $\varphi(x)=\sin 2x$, naći:

a) $f\left[\varphi\left(\frac{\pi}{12}\right)\right]$; b) $\varphi[f(1)]$;

c) $\varphi[f(2)]$; d) $f[\varphi(x)]$;

e) $f[f(x)]$; f) $f\{f[f(1)]\}$;

g) $\varphi[\varphi(x)]$.



Sl. 4

37. Obrazložiti sledeći način konstruisanja grafika posredne funkcije $y=f[\varphi(x)]=F(x)$ pomoću poznatih grafika „komponentnih" funkcija $f(x)$ i $\varphi(x)$: iz tačke A grafika funkcije $\varphi(x)$ (sl. 4), koja odgovara određenoj vrednosti nezavisno promenljive x, povlačimo pravu paralelnu osi Ox, do preseka B sa simetralom prvog i trećeg kvadranta, a iz tačke B povlačimo pravu paralelnu osi Oy, do preseka C sa grafikom funkcije $f(x)$; ako iz tačke C povučemo pravu paralelnu osi Ox, onda će tačka D u kojoj ova prava preseca pravu NN, predstavljati onu tačku grafika funkcije $F(x)$ koja odgovara polaznoj vrednosti x.

Implicitne funkcije

38. Napisati u eksplicitnom vidu funkciju definisanu implicitno sledećom jednačinom:

1) $x^2+y^2=1$; 2) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$; 3) $x^3+y^3=a^3$; 4) $xy=C$;

5) $2^{xy}=5$; 6) $\lg x+\lg(y+1)=4$; 7) $2^{x+y}(x^2-2)=x^3+7$;

8) $(1+x)\cos y-x^2=0$.

39*. Pokazati da je za $x>0$ grafik funkcije y, definisane jednačinom $y+|y|-x-|x|=0$ — simetrala prvog kvadranta, dok je za $x\leqslant 0$ ova funkcija mnogoznačna i njen je „grafik" skup svih tačaka trećeg kvadranta (uključujući i tačke na njegovoj granici).

§ 3. Početno proučavanje funkcija

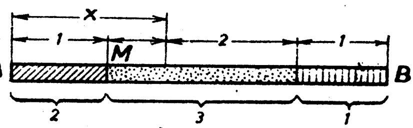
Oblast definisanosti funkcije

40. Sastaviti tablicu vrednosti funkcije $\frac{1}{x!}$ celobrojnog argumenta x za $1\leqslant x\leqslant 6$.

41. Funkcija $\varphi(n)$ celobrojnog argumenta n definisana je ovako: $\varphi(n)=$ = broju prostih brojeva ne većih od n. Sastaviti tablicu njenih vrednosti za $1\leqslant n\leqslant 20$.

42. Funkcija $f(n)$ celobrojnog argumenta n definisana je ovako: $f(n)=$ = broju celih (pozitivnih) brojeva različitih od 1 i od n, kojima je deljiv argumenat n. Sastaviti tablicu njenih vrednosti za $1\leqslant n\leqslant 20$.

43. Štapić na sl. 5 sastavljen je iz tri dela čije su dužine respektivno: 1; 2; 1 jedinica dužine, a težine su im: 2; 3; 1 jedinica težine. Težina parčeta AM promenljive dužine x je funkcija od x. Za koje je vrednosti x definisana ta funkcija? Predstaviti je pomoću analitičkih izraza i nacrtati njen grafik.



Sl. 5

44. Kula ima sledeći oblik: na prav kružni zarubljeni konus sa poluprečnicima osnova $2R$ (donje) i R (gornje) i visinom R, postavljen je cilindar poluprečnika R i visine $2R$, a na cilindar — polusfera poluprečnika R. Izraziti površinu S poprečnog preseka kule kao funkciju odstojanja x preseka od donje osnove konusa, i nacrtati grafik funkcije $S=f(x)$.

45. U loptu poluprečnika R upisan je cilindar. Izraziti funkcionalnu zavisnost zapremine V cilindra od njegove visine x i odrediti oblast definisanosti te funkcije.

46. U loptu poluprečnika R upisan je prav konus. Izraziti funkcionalnu zavisnost površine M omotača konusa od dužine x njegove izvodnice i odrediti oblast definisanosti te funkcije.

U zadacima 47 — 48 naći oblast definisanosti sledećih funkcija:

47. 1) $y=1-\lg x$; 2) $y=\lg(x+3)$; 3) $y=\sqrt{5-2x}$;

4) $y=\sqrt{-px}\ (p>0)$; 5) $y=\dfrac{1}{x^2-1}$; 6) $y=\dfrac{1}{x^2+1}$;

7) $y=\dfrac{1}{x^3-x}$; 8) $y=\dfrac{2x}{x^2-3x+2}$; 9) $y=1-\sqrt{1-x^2}$;

10) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-4x}}$; 11) $y=\sqrt{x^2-4x+3}$;

12) $y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-3x+2}}$; 13 $y=\arcsin\dfrac{x}{4}$;

14) $y=\arcsin(x-2)$; 15) $y=\arccos(1-2x)$;

16) $y=\arccos\dfrac{1-2x}{4}$; 17) $y=\arcsin\sqrt{2x}$;

18) $y=\sqrt{1-|x|}$; 19) $y=\dfrac{1}{\sqrt{|x|-x}}$; 20) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x-|x|}}$;

21) $y=\sqrt{\lg\dfrac{5x-x^2}{4}}$; 22) $y=\lg\sin x$;

23) $y=\arccos\dfrac{2}{2+\sin x}$; 24) $y=\log_x 2$.

48. 1) $y=\dfrac{1}{\lg(1-x)}+\sqrt{x+2}$; 2) $y=\sqrt{3-x}+\arcsin\dfrac{3-2x}{5}$;

3) $y=\arcsin\dfrac{x-3}{2}-\lg(4-x)$;

4) $y=\sqrt{x}+\sqrt[3]{\dfrac{1}{x-2}}-\lg(2x-3)$;

5) $y=\sqrt{x-1}+2\sqrt{1-x}+\sqrt{x^2+1}$;

6) $y=\dfrac{3}{4-x^2}+\lg(x^3-x)$; 7) $y=\lg\sin(x-3)+\sqrt{16-x^2}$;

8) $y=\sqrt{\sin x}+\sqrt{16-x^2}$; 9) $y=\dfrac{1}{\sqrt{\sin x}}+\sqrt[3]{\sin x}$;

10) $y=\lg\dfrac{x-5}{x^2-10x+24}-\sqrt[3]{x+5}$;

11) $y=\sqrt{\dfrac{x-2}{x+2}}+\sqrt{\dfrac{1-x}{\sqrt{1+x}}}$;

12) $y=\sqrt{x^2-3x+2}+\dfrac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}}$;

13) $y=(x^2+x+1)^{-\frac{3}{2}}$; 14) $y=\lg\left(\sqrt{x-4}+\sqrt{6-x}\right)$;

15) $y=\lg[1-\lg(x^2-5x+16)]$.

49. Jesu li identične funkcije:

1) $f(x)=\dfrac{x}{x^2}$ i $\varphi(x)=\dfrac{1}{x}$; 3) $f(x)=x$ i $\varphi(x)=\sqrt{x^2}$;.

2) $f(x)=\dfrac{x^2}{x}$ i $\varphi(x)=x$; 4) $f(x)=\lg x^2$ i $\varphi(x)=2\lg x$?

50. Navesti primer funkcije od x zadane analitički i:

1) definisane samo u intervalu $-2\leqslant x\leqslant 2$;

2) definisane samo za x 0 za koje je $-2\leqslant x\leqslant 2$.

3) definisane za sve (realne) vrednosti x izuzev za $x=2$, $x=3$, i $x=4$.

51. Naći oblasti definisanosti jednoznačnih grana funkcije $y(x)$ definisane implicitno jednačinom:

1) $y^2-1+\log_2(x-1)=0$: 2) $y^4-2xy^2+x^2-x=0$.

Elementi ponašanja funkcije

52. Naći oblast definisanosti funkcije $\dfrac{x^2}{1+x^2}$ i pokazati da je ova funkcija nenegativna.

53. Naći nule i intervale postojanosti znaka sledećih funkcija:

1) $y(x)=3x-6$; 2) $f(x)=x^2-5x+6$; 3) $g(x)=2^{x-1}$;

4) $h(x)=x^3-3x^2+2x$; 5) $u(x)=|x|$.

54. Utvrditi koje su od niže navedenih funkcija parne, koje neparne, a koje nisu ni parne ni neparne:

1) x^4-2x^2; 2) $x-x^2$; 3) $\cos x$; 4) 2^x; 5) $x-\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^5}{120}$;

6) $\sin x$; 7) $\sin x-\cos x$; 8) $1-x^2$; 9) $\operatorname{tg} x$; 10) 2^{-x^2};

11) $\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}$; 12) $\dfrac{a^x-a^{-x}}{2}$; 13) $\dfrac{x}{a^x-1}$; 14) $\dfrac{a^x+1}{a^x-1}$;

15) $x\cdot\dfrac{a^x-1}{a^x+1}$; 16) 2^{x-x^4}; 17) $\ln\dfrac{1-x}{1+x}$.

55. Svaku od sledećih funkcija predstaviti u obliku zbira parne i neparne funkcije:

1) $g(x)=x^2+3x+2$; 2) $h(x)=1-x^3-x^4-2x^2$,

3) $w(x)=\sin 2x+\cos\frac{x}{2}+\operatorname{tg} x$.

56. Pokazati da je $f(x)+f(-x)$ — parna, a $f(x)-f(-x)$ — neparna funkcija.

57. Predstaviti u obliku zbira parne i neparne funkcije sledeće funkcije:

1) $u(x)=a^x$; 2) $v(x)=(1+x)^{100}$. (vidi zadatak 56).

58. Dokazati da je proizvod dve parne funkcije parna funkcija, proizvod dve neparne — parna, a proizvod parne i neparne — neparna funkcija.

59. Utvrditi koje su od niže navedenih funkcija periodične:

1) $f(x)=\sin^2 x$; 2) $g(x)=\sin x^2$; 3) $h(x)=x\cos x$; 4) $u(x)=\sin\frac{1}{x}$;

5) $v(x)=1+\operatorname{tg} x$; 6) $y(x)=5$; 7) $\psi(x)=E(x)$; 8) $\lambda(x)=x-E(x)$.

(Funkcija $E(x)$ definiše se ovako: $E(x)$ je najveći ceo broj koji nije veći od x; npr. $E(2)=2$; $E(3{,}25)=3$; $E(-1{,}37)=-2$).

60. Nacrtati grafik periodične funkcije $y(x)$ čiji je period $T=1$ i koja je u poluotvorenom intervalu $[0, 1)$ definisana obrascem:

1) $y(x)=x$; 2) $y(x)=x^2$.

61. Za sledeće funkcije odrediti intervale rašćenja i opadanja, kao i intervale u kojima funkcija zadržava konstantnu vrednost:

1) $f(x)=|x|$; 2) $g(x)=|x|-x$.

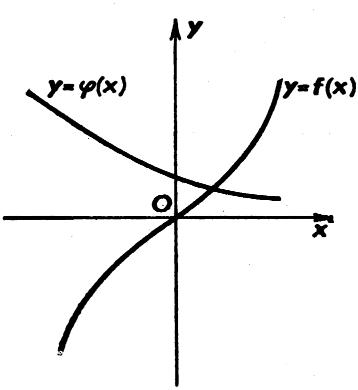
62. Naći najveće i najmanje vrednosti funkcija:

1) $\sin^2 x$; 2) $\cos x^3$; 3) $1-\sin x$; 4) 2^{x^2}.

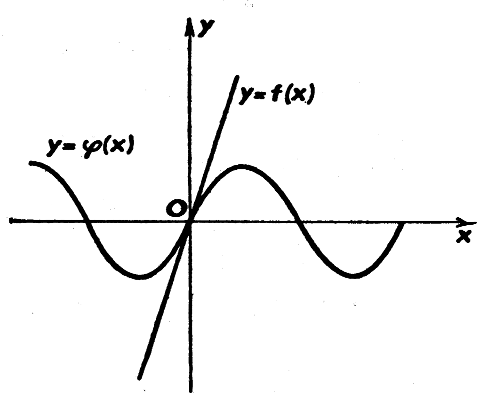
63. Služeći se grafičkim sabiranjem nacrtati grafik funkcije $f(x)+\varphi(x)$:

1) za grafike predstavljene na sl. 6;

2) za grafike predstavljene na sl. 7.



Sl. 6



Sl. 7

64. Znajući grafik funkcije $f(x)$ nacrtati grafik funkcije:

1) $g(x)=|f(x)|$; 2) $u(x)=\frac{1}{2}[|f(x)|+f(x)]$; 3) $v(x)=\frac{1}{2}[|f(x)|-f(x)]$.

§ 4. Prostije elementarne funkcije

Linearna funkcija

65. Koristeći Omov zakon i znajući da elektromotornoj sili $E=2{,}4\ V$ odgovara jačina struje I od $0{,}8\ A$, izraziti zavisnost jačine struje od elektromotorne sile, i nacrtati grafik dobijene funkcije.

66. U sud proizvoljnog oblika usuta je tečnost. Na dubini $h=25{,}3\ cm$ pritisak tečnosti p iznosi $18{,}4\ g/cm^2$.

a) Napisati u analitičkom vidu funkciju koja izražava zavisnost pritiska od dubine.

b) Odrediti pritisak na dubini $h=14{,}5\ cm$.

c) Na kojoj će dubini pritisak iznositi $26{,}5\ g/cm^2$?

67. Telo se kreće pravolinijski pod dejstvom sile F. Polazeći od Njutnovog zakona izraziti silu F kao funkciju ubrzanja w znajući da, kad se telo kreće s ubrzanjem od $12\ m/cec^2$, mehanički rad A koji izvrši sila F na putu $s=15\ m$ iznosi 32 džula.

68. Odrediti linearnu funkciju $y=ax+b$ iz sledećih podataka:

1)

x	y
0	4
3	6

2)

x	y
2	4,3
$-1{,}6$	0

3)

x	y
2,5	7,2
3,2	6,8

69. Izvesna količina gasa na temperaturi od $20°\ C$ zauzimala je zapreminu od $107\ cm^3$, dok je pri temperaturi od $40°\ C$ zapremina istog gasa bila $114\ cm^3$.

a) Polazeći od Gej-Lisakovog zakona izraziti zapreminu V gasa u zavisnosti od temperature t.

b) Kolika će biti zapremina gasa na $0°\ C$?

70. Tačka se kreće ravnomerno tako da nakon $12\ sec$ od početka kretanja njeno odstojanje od neke početne tačke iznosi $32{,}7\ cm$, a nakon $20\ sec$ njena je udaljenost od početne tačke $43{,}4\ cm$. Izraziti odstojanje s kao funkciju vremena t.

71. U nekom kolu struje napon opada ravnomerno (po linearnom zakonu) u toku vremena. U početku opita napon je iznosio $12\ V$, a do kraja opita koji je trajao $8\ sec$ njegova je vrednost spala na $6{,}4\ V$. Izraziti napon U kao funkciju vremena t i nacrtati grafik te funkcije.

72. Naći priraštaj linearne funkcije $y=2x-7$ pri prelazu nezavisno promenljive x od vrednosti $x_1=3$ na vrednost $x_2=6$.

73. Naći priraštaj linearne funkcije $y=-3x+1$, koji odgovara priraštaju $\Delta x=2$ nezavisno promenljive.

74. Funkcija $y=2{,}5\,x+4$ dobila je priraštaj $\Delta y=10$. Naći priraštaj argumenta.

75. Data je funkcija $y=\dfrac{x-a}{a^2-b^2}$ i početna vrednost $x_1=a-b$ nezavisno promenljive. Za koju će konačnu vrednost x_2 nezavisno promenljive x biti priraštaj funkcije $\Delta y=\dfrac{1}{a-b}$?

76. Funkcija $\varphi(x)$ definisana je ovako:

$$\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}x+2 & \text{za } x<2,\\ 5-x & \text{za } x>2.\end{cases}$$

Naći analitički i grafički korene jednačine $\varphi(x)=2x-4$.

77. Nacrtati grafike funkcija:

1) $y=|x+1|+|x-1|$; 2) $y=|x+1|-|x-1|$;

3) $y=|x-3|-2|x+1|+2|x|-x+1$.

78*. Za koje je vrednosti promenljive x zadovoljena nejednakost

$$|f(x)+\varphi(x)|<|f(x)|+|\varphi(x)|,$$

ako je $f(x)=x-3$, a $\varphi(x)=4-x$.

79. Za koje vrednosti promenljive x zadovoljena nejednakost

$$|f(x)-\varphi(x)|>|f(x)|-|\varphi(x)|,$$

ako je $f(x)=x$, a $\varphi(x)=x-2$.

80. Funkcija $f(x)$ definisana je ovako: u svakom od intervala $[n, n+1]$, pri čemu je n ceo pozitivan broj, $f(x)$ je linearna funkcija, i uz to $f(n)=-1$ i $f\left(n+\dfrac{1}{2}\right)=0$; nacrtati grafik te funkcije.

Kvadratna funkcija

81. Nacrtati grafik i odrediti intervale rašćenja i opadanja date funkcije:

1) $y=\dfrac{1}{2}x^2$; 2) $y=x^2-1$; 3) $y=|x^2-1|$; 4) $y=1-x^2$;

5) $y=x^2-x+4$; 6) $y=x-x^2$; 7) $y=|x-x^2|$; 8) $y=2x^2+3$;

9) $y=2x^2-6x+4$; 10) $y=-3x^2+6x-1$;

11) $y=|-3x^2+6x-1|$; 12) $y=-x|x|$.

82. Predstaviti pomoću analitičikih izraza jednoznačnu funkciju $y(x)$ definisanu za sve $x<6$, čiji se grafik sastoji:

iz tačaka x-ose čije su apscise manje od -3;

iz tačaka parabole koja prolazi kroz tačke $A(-3, 0)$ i $B(0, 5)$ i simetrična je u odnosu na y-osu;

iz tačaka pravolinijskog odsečka CD čiji su krajevi $C(3; 0)$ i $D(6; 2)$.

83. Naći najveću vrednost funkcije:

1) $y=-2x^2+x-1$; 2) $y=-x^2-3x+2$; 3) $y=5-x^2$;

4) $y=-2x^2+ax-a^2$; 5) $y=a^2x-b^2x^2$.

84. Naći najmanju vrednost funkcije:

1) $y=x^2+4x-2$; 2) $y=2x^2-1{,}5x+0{,}6$; 3) $y=1-3x+6x^2$;

4) $y=a^2x^2+a^4$; 5) $y=(ax+b)(ax-2b)$.

85. Predstaviti broj a u vidu zbira dva sabirka tako da njihov proizvod ima najveću moguću vrednost.

86. Predstaviti broj a u vidu zbira dva broja tako da zbir kvadrata ovih brojeva ima najmanju moguću vrednost.

87. Uz kameni zid treba ogradom od dasaka prigraditi pravougaono parče zemljišta. Ukupna dužina daščane ograde iznosi $8\ m$. Kolika mora biti dužina ovog dela ograde koji je paralelan zidu da bi površina ograđenog zemljišta bila maksimalna?

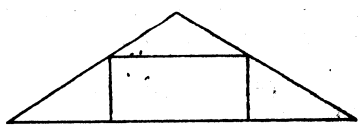
88. U trouglu ABC ugao sa temenom A ima $30°$, a zbir strana koje obrazuju taj ugao iznosi $100\ cm$. Kolika mora biti strana AB da bi površina trougla bila maksimalna?

89. Koji od pravih kružnih cilindara čiji obim osovinskog preseka iznosi $100\ cm$ ima maksimalnu površinu omotača?

90. Odrediti prav kružini konus tako da obim njegovog osovinskog preseka ima datu površinu P, a da mu površina omotača bude maksimalna.

91. Telo ima oblik pravog kružnog cilindra sa konusnim završetkom na jednoj strani (osnova konusa se poklapa sa osnovom cilindra). Ugao pri vrhu konusa je $60°$. Obim osovinskog preseka tela iznosi $100\ cm$. Koliki mora biti poluprečnik cilindra da bi bočna površina tela bila maksimalna?

92. U ravnokraki trougao čija je osnovica a i visina h upisan je poluprečnik kao na sl. 8. Koliko mora biti visina pravougaonika da bi njegova površina bila maksimalna?



Sl. 8

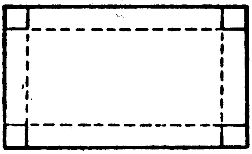
93. U dati prav konus upisan je cilindar tako da se ravni i centri kružnih osnova konusa i cilindra poklapaju. Koliki mora biti odnos poluprečnikâ osnovâ cilindra i konusa da bi bočna površina cilindra bila maksimalna?

94. U prav kružni konus čiji je poluprečnik osnove R i visina H upisan je cilindar tako da se ravni i centri kružnih osnova cilindra i konusa poklapaju. Koliki mora biti poluprečnik cilindra da bi njegova ukupna površina bila maksimalna? Razmotriti slučajeve $H>2R$ i $H<2R$.

95. Koliki mora biti poluprečnik kruga da bi kružni isečak datog obima P imao maksimalnu površinu?

96. Prozor ima oblik pravougaonika čiji se gornji kraj završava ravnostranim trouglom. Ako obim prozora ima datu vrednost P, kolika mora biti osnovica a pravougaonika da bi površina prozora bila maksimalna?

97. Prozor ima oblik pravougaonika čiji se gornji kraj završava polukrugom. Ako obim prozora iznosi $2\,m$, kolika mora biti osnovica pravougaonika da bi površina prozora bila maksimalna?


Sl. 9

98. Parče kartona ima oblik pravougaonika čija je veličina $30 \times 50\,cm^2$. Od njegovih uglova treba odseći 4 podudarna kvadrata tako da kad se preostali deo kartona ispresavija po isprekidanim linijama (sl. 9) dobija se kutija (bez poklopca) maksimalne bočne površine. Odrediti stranicu isečenih kvadrata.

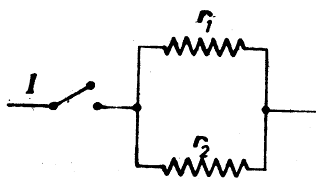
99. Od komada žice dužine $120\,cm$ treba napraviti model pravouglog paralelepipeda sa kvadratnom osnovom. Kolika mora biti ivica osnove da bi ukupna površina paralelepipeda bila maksimalna?

100. Komad žice čija je dužina $a\,cm$ treba podeliti na dva dela, i od jednog napraviti kvadrat, a od drugog — ravnostran trougao. Kako treba podeliti žicu da bi zbir površina tako dobijenih figura bio minimalan.

101. Na pravoj $y=x$ naći tačku M tako da zbir kvadratâ odstojanjâ tačke M od tačaka $(-a, 0)$, $(a, 0)$ i $(0, b)$ bude minimalan.

102. Na pravoj $y=x+2$ naći tačku M tako da zbir kvadrata odstojanjâ tačke M od pravih $3x-4y+8=0$ i $3x-y-1=0$ bude minimalan.

103. Električna struja jačine I grana se na dve grane čiji su otpori r_1 i r_2 (sl. 10). Pokazati da su gubici energije (u jedinici vremena) koji nastaju usled zagrevanja provodnika, najmanji kad su jačine struja u granama obrnuto proporcionalne otporima (poći od poznatog zakona po kojem je količina nastale toplote $Q=I^2Rt$).



Sl. 10

104. Nacrtati parabolu $y=x^2$ i iskoristiti je za grafičko rešavanje sledećih jednačina:

1) $x^2-x-2{,}25=0$; 2) $2x^2-3x-5=0$; 3) $3{,}1x^2-14x+5{,}8=0$;

4) $4x^2-12x+9=0$; 5) $3x^2-8x+7=0$.

105. Funkcija $\varphi(x)$ definisana je ovako:

$$\varphi(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x-\frac{1}{2} & \text{za } x\leqslant\frac{11}{3};\\ 1+x & \text{za } x>\frac{11}{13}\end{cases}$$

Naći računski i grafički sve korene jednačine $[\varphi(x)]^2=7x+25$.

106. Odrediti oblast definisanosti funkcije

$$y=\lg(ax^2+bx+c).$$

107. Naći $f(x+1)$ ako je $f(x-1)=2x^2-3x+1$.

108*. Pokazati da vrednost funkcije $f(x)=\frac{x^2+2x+c}{x^2+4x+3c}$ može biti svaki realan broj ako je $0<c<1$.

Funkcija oblika $\frac{ax+b}{cx+d}$

109. Polazeći od Bojl-Mariotovog zakona sastaviti funkciju koja izražava zavisnost zapremine gasa od pritiska pri konstantnoj temperaturi t, ako se zna da kad je pritisak gasa 760 *mm* njegova je zapremina 2,3 *l*. Nacrtati grafik te funkcije.

110. Ako je promenljiva x obrnuto proporcionalna veličini y, y — obrnuto proporcionalna veličini z, a z — obrnuto proporcionalno veličini v, kakva je zavisnost između x i v?

111. Ako je promenljiva x obrnuto proporcionalna veličini y, y — direktno proporcionalno veličini z, z — direktno proporcionalna veličini u, u — obrnuto proporcionalna veličini v, kakva je zavisnost između x i v?

112. Količina materije koja se pri elektrolizi izdvaja na elektrodi proporcionalna je jačini struje, jačina struje proporcionalna je provodljivosti elektrolita, provodljivost je proporcionalna koncentraciji elektrolita, a koncentracija je, pri datoj količini materije, obrnuto proporcionalna zapremini rastvarača. Kako zavisi količina materije izdvojene na elektrodi od zapremine rastvarača?

113. Nacrtati grafik funkcije:

1) $y=\frac{x-1}{x-2}$; 2) $y=\frac{2x}{3-x}$; 3) $y=\frac{2x-5}{3x-7,5}$;

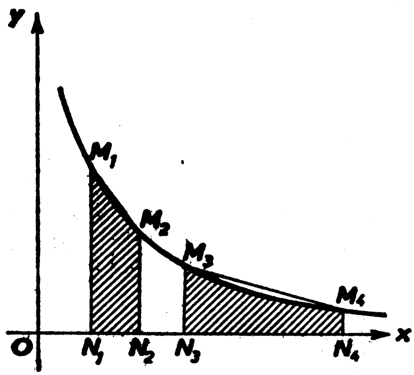
4) $y=\frac{x}{1-\frac{1}{2}x}$; 5) $y=\frac{4-3x}{3-2,25x}$.

114. Koristeći grafik naći najveće i najmanje vrednosti funkcije u datom intervalu:

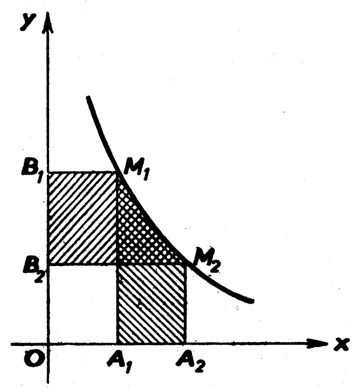
1) $y=\frac{4}{x}$ $[1,\ 5]$; 2) $y=\frac{x}{2x-5}$ $[-1,\ 2]$; 3) $y=\frac{1-x}{1+x}$ $[0,\ 4]$.

115. Dokazati da: 1) ako apscise četiri tačke $M_1(x_1,\ y_1)$, $M_2(x_2,\ y_2)$, $M_3(x_3,\ y_3)$, $M_4(x_4,\ y_4)$ grafika funkcije $y=\frac{k}{x}$ (sl. 11) obrazuju proporciju $\frac{x_1}{x_2}=\frac{x_3}{x_4}$, onda trapezi $M_1M_2N_2N_1$ i $M_3M_4N_4N_3$ imaju jednake površine;

2) ako tačke M_1 i M_2 leže na grafiku funkcije $y=\frac{k}{x}$ (sl. 12), onda su površine figurâ $A_1M_1M_2A_2$ i $B_1M_1M_2B_2$ jednake među sobom.



Sl. 11



Sl. 12

116. Služeći se grafičkim sabiranjem nacrtati grafik funkcije $y=\frac{x^2+1}{x}$.

§ 5. Inverzna funkcija. Stepena, eksponencijalna i logaritamska funkcija

Inverzna funkcija

117. Naći funkciju inverznu datoj:

1) $y=x$; 2) $y=2x$; 3) $y=1-3x$; 4) $y=x^4+1$; 5) $y=\frac{1}{x}$;

6) $y=\frac{1}{1-x}$; 7) $y=x^2-2x$; 8) $y=\sqrt{x^2+1}$; 9) $y=10^{x+1}$;

10) $y=1+\lg(x+2)$; 11) $y=\log_x 2$; 12) $y=\frac{2^x}{1+2^x}$;

13) $y=\frac{10^x-10^{-x}}{10^x+10^{-x}}+1$; 14) $y=2\sin 3x$; 15) $y=1+2\sin\frac{x-1}{x+1}$;

16) $y=4\arcsin\sqrt{1-x^2}$.

118. Pokazati da je funkcija $\frac{1-x}{1+x}$ sama sebi inverzna; naći još takvih funkcija.

119. Pokazati da je funkcija $\frac{ax-b}{cx-d}$ sama sebi inverzna.

120. Pokazati da: ako je $f(x)=\sqrt[n]{a-x^n}$, $x>0$, onda je $f[f(x)]=x$; naći funkciju inverznu funkciji $f(x)$.

121. Čime se odlikuje grafik funkcije koja je identična sa svojom inverznom funkcijom?

122. Jednačinom $y^2-1+\lg_2(x-1)=0$ definisane su dve (jednoznačne i neprekidne) funkcije $y(x)$; naći njihove oblasti definisanosti, kao i njima inverznu funkciju.

123. Jednačinom $y^2+\sin^3 x-y-2=0$ definisane su dve (jednoznačne i neprekidne) funkcije $y(x)$; naći njima inverznu funkciju.

Stepena funkcija

124. Nacrtati grafike funkcija:

1) $y=\frac{1}{3}x^3$; 2) $y=-\frac{1}{2}x^3$; 3) $y=x^3+3x^2$; 4) $y=x^3-x+1$;

5) $y=-x^3+2x-2$; 6) $y=2x^{\frac{3}{2}}$; 7) $y=\frac{1}{2}x^{\frac{5}{4}}$; 8) $y=x^{0,3}$;

9) $y=x^{2,1}$; 10) $y=x^{0,62}$; 11) $y=\frac{1}{2}x^{-0,2}$; 12) $y=5x^{-2,5}$;

13) $y=1-\sqrt{|x|}$.

125. Naći grafički približne vrednosti realnih korena jednačine

$$x+3=4\sqrt[3]{x^2}.$$

126*. Nacrtati kubnu parabolu $y=x^3$ i iskoristiti je za grafičko rešavanje jednačine:

1) $x^3+x-4=0$; 2) $x^3-3x^2-x+3=0$; 3) $x^3-6x^2+9x-4=0$;

4) $x^3+3x^2+6x+4=0$.

127. Po datom uslovu sastaviti jednačinu i rešiti je grafički:

1) Odrediti broj čiji je kvadrat jednak zbiru tog istog broja i njegove recipročne vrednosti.

2) Drvena kugla poluprečnika 10 *cm* i gustine 0,8 g/cm^3 pliva na površini vode; naći debljinu potonulog dela kugle.

3) Drvena kocka i piramida s kvadratnom osnovom teške su zajedno 0,8 *kp*; ivica kocke jednaka je osnovnoj ivici piramide, a visina piramide je 45 *cm*. Naći ivicu kocke ako je specifična težina drveta 0,8 g/cm^3.

128. Data je funkcija $y=x^4$, $x>0$. Za koje su vrednosti promenljive x vrednosti ove funkcije veće, a za koje — manje, od vrednosti inverzne funkcije (sa istom oznakom x argumenta).

Eksponencijalne i hiperbolične funkcije

129. Nacrtati grafik funkcije:

1) $y=-2^x$; 2) $y=2^{x+3}$; 3) $y=\frac{1}{3}\cdot 3^x$; 4) $y=1-3^{x-3}$;

5) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$; 6) $y=2^{-x^2}$.

130. Nacrtati grafik funkcije $y=2^x$. Na istom crtežu bez dopunskih izračunavanja nacrtati grafik funkcije:

1) $y=2^{x-1}$; 2) $y=\frac{1}{12}\cdot 2^{\frac{x}{2}}$; 3) $y=\frac{1}{3}\cdot 2^{\frac{x-1}{2}}+1$.

131. Pokazati da je grafik funkcije $y=ka^x$ $(k>0)$ ista kriva kao i grafik funkcije $y=a^x$, samo pomerena translatorno u pravcu y-ose.

132. Grafičkim sabiranjem nacrtati na milimetarskom papiru grafik funkcije:

1) $y=x^2+2^x$; 2) $y=x^2-2^x$.

133. Rešiti grafički jednačinu $2^x-2x=0$.

134. Nacrtati na milimetarskom papiru figuru ograničenu linijama: $y=2^x$, $y=\frac{1+x}{x}$ i $x=3$. Koristeći crtež odrediti približno koordinate presečnih tačaka pomenutih linija.

135. Naći najveću moguću vrednost n za koju je $2^x>x^n$ za svako $x\geqslant 100$ (n je ceo broj).

136. Pokazati da su $\operatorname{sh} x$ i $\operatorname{th} x$ neparne, a $\operatorname{ch} x$ parna funkcija. Da li su ove funkcije periodične?

137. Dokazati da važe sledeće jednakosti:

1) $\operatorname{ch}^2 x-\operatorname{sh}^2 x=1$; 2) $\operatorname{ch}^2 x+\operatorname{sh}^2 x=\operatorname{ch} 2x$;

3) $2\operatorname{sh} x\cdot\operatorname{ch} x=\operatorname{sh} 2x$; 4) $\operatorname{sh}(\alpha\pm\beta)=\operatorname{sh}\alpha\cdot\operatorname{ch}\beta\pm\operatorname{sh}\beta\cdot\operatorname{ch}\alpha$;

5) $\operatorname{ch}(\alpha\pm\beta)=\operatorname{ch}\alpha\cdot\operatorname{ch}\beta\pm\operatorname{sh}\alpha\cdot\operatorname{sh}\beta$; 6) $1-\operatorname{th}^2 x=\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$;

7) $1-\operatorname{cth}^2 x=\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$.

Logaritamska funkcija

138. Nacrtati grafik funkcije:

1) $y=-\log_2 x$; 2) $y=\lg\frac{10}{x}$; 3) $y=|\lg x|$;

4) $y=\log_2|x|$; 5) $y=1+\lg(x+2)$; 6) $y=\log_2|1-x|$;

7) $y=a^{\log_a x}$; 8) $y=\log_x 2$.

139. Nacrtati grafik funkcije $y = \lg x$. Na istom crtežu bez dopunskih izračunavanja nacrtati grafik funkcije:

1) $y = \frac{1}{2} \lg(x+1)$; 2) $y = 2 \lg\left(\frac{x+1}{2}\right)$.

140. Grafičkim sabiranjem nacrtati grafik funkcije $x + \lg \frac{1}{x}$ i koristeći se njime naći najmanju vrednost ove funkcije u intervalu (0; 2).

141. Pokazati da je grafik funkcije $y = \lg_a\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ simetričan u odnosu na koordinatni početak. Naći njoj inverznu funkciju.

142. Dokazati da je ordinata grafika funkcije $\lg_a x$ jednaka odgovarajućoj ordinati grafika funkcije $\lg_{a^n} x$ pomnoženoj sa n.

§ 6. Trigonometrijske i njima inverzne funkcije

Trigonometrijske funkcije

143. Naći amplitudu i period sledećih harmonijskih oscilacija:

1) $y = \sin 3x$; 2) $y = 5 \cos 2x$; 3) $y = 4 \sin \pi x$;

4) $y = 2 \sin \frac{x}{2}$; 5) $y = \sin \frac{3\pi x}{4}$; 6) $y = 3 \sin \frac{5x}{8}$.

144. Naći amplitudu, period, frekvenciju i početnu fazu sledećih oscilacija:

1) $y = 2 \sin(3x+5)$; 2) $y = -\cos \frac{x-1}{2}$;

3) $y = \frac{1}{3} \sin 2\pi\left(\omega - \frac{1}{6}\right)$; 4) $y = \sin \frac{2t+3}{6\pi}$.

145. Nacrtati grafik funkcije:

1) $y = \sin x + \cos x$; 2) $y = \sin 2\pi x + \sin 3\pi x$;

3) $y = 2 \sin \frac{x}{2} + 3 \sin \frac{x}{3}$; 4) $y = x + \sin x$;

5) $y = x - \sin x$; 6) $y = -2^x + \cos x$.

11) $y = 2 + 2 \sin\left(\frac{\pi x}{2} + \frac{\pi}{6}\right)$; 12) $y = 2 \cos \frac{x-\pi}{3}$;

13) $y = |\sin x|$; 14) $y = |\cos x|$; 15) $y = |\operatorname{tg} x|$;

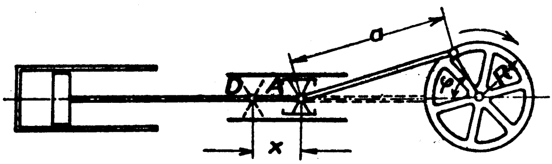
16) $y = |\operatorname{ctg} x|$; 17) $y = \sec x$; 18) $y = \operatorname{cosec} x$.

19) $y = \begin{cases} \cos x & \text{za} \quad -\pi \leqslant x \leqslant 0, \\ 1 & \text{,,} \quad 0 < x < 1, \\ \frac{1}{x} & \text{,,} \quad 1 \leqslant x \leqslant 2. \end{cases}$

146. Dužine dveju trouglovih strana su 1 *cm* i 2 *cm*. Nacrtati grafik koji prikazuje površinu trougla kao funkciju ugla između date dve strane; naći oblast definisanosti ove funkcije, kao i onu vrednost argumenta x za koju je površina trougla maksimalna.

147. Tačka se kreće ravnomerno po krugu poluprečnika R s centrom u koordinatnom početku, nasuprot kretanju satne kazaljke, linearnom brzinom v *cm/sec*. U početnom momentu apscisa tačke bila je a. Sastaviti jednačinu harmonijskog oscilovanja tačke.

148. Tačka se kreće ravnomerno po krugu $x^2+y^2=1$. U momentu t_0 njena je ordinata bila y_0, a u momentu t_1 ordinata joj je y_1. Naći zavisnost ordinate tačke od vremena, period i početnu fazu oscilovanja.



Sl. 13

149. Na sl. 13 prikazan je klipni mehanizam: poluprečnik zamajca je R, a dužina radilice a. Zamajac se obrće ravnomerno u negativnom smeru brzinom od n obrta u sekundi. U trenutku $t=0$ kad su radilica i klipnjača ležale na istoj pravoj („mrtvi" položaj) ukrsna glava A bila je u tački O. Izraziti zavisnost pomeranja x ukrsne glave A od vremena t.

150. Grafičkim sabiranjem nacrtati grafik funkcije:

1) $y=\sin x+\cos x$; 2) $y=\sin 2\pi x+\sin 3\pi x$;

3) $y=2\sin\frac{x}{2}+3\sin\frac{x}{3}$; 4) $y=x+\sin x$;

5) $y=x-\sin x$; 6) $y=-2^x+\cos x$;

151. Rešiti grafički jednačine:

1) $x=2\sin x$; 2) $x=\operatorname{tg} x$; 3) $x-\cos x=0$;

4) $4\sin x=4-x$; 5) $2^{-x}=\cos x$.

152. Naći period složenog harmoniskog oscilovanja:

1) $y=2\sin 3x+3\sin 2x$; 2) $y=\sin t+\cos 2t$;

3) $y=\sin\frac{\pi t}{3}+\sin\frac{\pi t}{4}$;

4) $y=\sin\left(2\pi t+\frac{\pi}{3}\right)+2\sin\left(3\pi t+\frac{\pi}{4}\right)+3\sin 5\pi t$.

153. Predstaviti u obliku jedne proste harmonijske oscilacije:

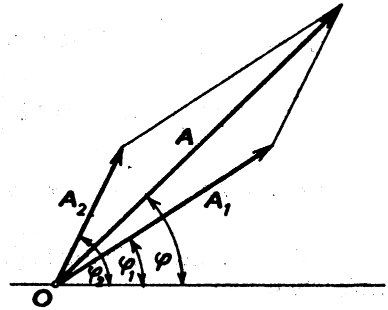
1) $y=\sin x+\cos x$; 2) $y=\sin x+2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$.

154. Obrazložiti sledeći grafički metod slaganja harmonijskih oscilacija: Neka su date proste harmonijske oscilacije:

$$A_1 \sin(\omega x + \varphi_1) \quad \text{i} \quad A_2 \sin(\omega x + \varphi_2).$$

Konstruišimo vektore A_1 i A_2 čiji su intenziteti respektivno A_1 i A_2, i koji sa horizontalnom osom obrazuju uglove φ_1 i φ_2 (sl. 14). Zbir vektora A_1 i A_2 daje vektor A intenziteta A, koji sa horizontalnom osom zaklapa ugao φ; A i φ će biti amplituda i početna faza zbira, tj.

$$A_1 \sin(\omega x + \varphi_1) + A_2 \sin(\omega x + \varphi_2) = \\ = A \sin(\omega x + \varphi).$$



Sl. 14

155*. Naći period i nacrtati grafik funkcije:

1) $y = |\sin x| + |\cos x|$; 2) $y = \frac{1}{2}\left(\frac{|\sin x|}{\cos x} + \frac{\sin x}{|\cos x|}\right)$.

156. Naći oblast definisanosti i opisati oblik grafika funkcije:

1) $y = \lg \sin x$; 2) $y = \sqrt{\lg \sin x}$; 3) $y = \sqrt{\lg \frac{1}{|\sin x|}}$.

Funkcije inverzne trigonometrijskim

157. Nacrtati grafik funkcije:

1) $y = \operatorname{arctg} x$; 2) $y = 2 \arcsin \frac{x}{2}$; 3) $y = 1 + \operatorname{arctg} 2x$;

4) $y = \frac{\pi}{2} - \arccos 2x$; 5) $y = \arcsin \frac{1-x}{4}$.

158. Od kružnog isečka čiji je centralni ugao α napravljen je konus. Izračunati ugao ω pri vrhu konrsa u funkciji ugla α, i nacrtati grafik te funkcije.

159. Umetnička slika visoka $2\,m$ visi koso na zidu, obrazujući sa zidom ugao φ. Donja ivica slike leži $b\ m$ iznad nivoa očiju posmatrača koji stoji na odstojanju $l\ m$ od zida. Naći zavisnost između ugla γ pod kojim posmatrač vidi sliku, i ugla φ.

160. Kod klipnog mehanizma (vidi sl. 13, zad. 149) izraziti zavisnost ugla α za koji se obrne radilica, — od pomeranja x ukrsne glave.

161. Utvrditi za koje vrednosti promenljive x važi identitet:

1) $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$; 2) $\arcsin \sqrt{x} + \arccos \sqrt{x} = \frac{\pi}{2}$;

3) $\arccos \sqrt{1-x^2} = \arcsin x$; 4) $\arccos \sqrt{1-x^2} = -\arcsin x$;

5) $\operatorname{arctg} x = \operatorname{arcctg}\frac{1}{x}$; 6) $\operatorname{arctg} x = \operatorname{arcctg}\frac{1}{x} - \pi$;

7) $\arccos\frac{1-x^2}{1+x^2} = 2\operatorname{arctg} x$; 8) $\arccos\frac{1-x^2}{1+x^2} = -2\operatorname{arctg} x$;

9) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} 1 = \operatorname{arctg}\frac{1+x}{1-x}$;

10) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} 1 = \pi + \operatorname{arctg}\frac{1+x}{1-x}$.

162. Koristeći identitete iz zad. 161 naći oblast definisanosti i nacrtati grafik funkcije:

1) $y = \arccos\sqrt{1-x^2}$; 2) $y = \arcsin\sqrt{1-x} + \arcsin\sqrt{x}$;

3) $y = \arccos\frac{1-x^2}{1+x^2}$; 4) $y = \operatorname{arctg} x - \operatorname{arcctg}\frac{1}{x}$.

163*. Nacrtati grafik funkcije $\arcsin(\sin x)$ i pokazati da je ova funkcija periodična.

164. Nacrtati grafik funkcije $\arccos(\cos x)$.

165. Nacrtati grafik funkcije $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$.

166. Nacrtati grafik funkcije:

1) $y = x - \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$; 2) $y = x - \arcsin(\sin x)$;

3) $y = x \arcsin(\sin x)$; 4) $y = \arccos(\cos x) - \arcsin(\sin x)$.

§ 7. Numerički zadaci

167. Nacrtati grafik funkcije $y = x^3 + 2x^2 - 4x + 7$ u intervalu $[-4; 2]$ na osnovu tablice njenih vrednosti izračunatih za $x = -4 + 0{,}2 \cdot k$, $k = 0, 1, 2, \ldots, 30$; jedinični odsečak na ordinatnoj osi uzeti 20 puta manji od onog na apscisnoj osi. Koristeći grafik naći najveću i najmanju vrednost funkcije u intervalu $[-3; 2]$. U kojoj tački funkcija od rastuće prelazi u opadajuću? Naći nulu funkcije u intervalu $[-4; 2]$. Računati sa tačnošću od 0,1.

168. Pri izračunavanju zakona rasprskavanja šrapnela u teoriji gađanja nameće se potreba za crtanjem grafika funkcije $y = e^{A\cos^2\alpha}$, pri čemu je $e \approx 2{,}718$. Za $A = 2$ nacrtati grafik funkcije na osnovu njenih vrednosti izračunatih za $\alpha = k \cdot 5^0$, $k = 0, 1, 2, \ldots, 18$. Računati sa tačnošću od 0,01.

169. Date su tri tačke: $M_1(1; 8)$, $M_2(5; 6)$, $M_3(9; 3)$. Postaviti kroz njih parabolu $y = ax^2 + bx + c$. Naći nule funkcije $ax^2 + bx + c$. Računati sa tačnošću od 0,01.

170. Od uglova kvadratnog komada lima veličine $30 \times 30\ cm^2$ treba odseći podudarne kvadrate tako da se od preostalog dela može sklopiti kutija zapremine $1600\ cm^3$. Kolika mora biti stranica svakog od odsečenih kvadrata? Tačnost računanja 0,01.

171. Pokazati da: ako se u jednačini

$$x^4 + px^2 + qx + s = 0$$

stavi $x^2 = y$, onda se jednačina svodi na sistem:

$$\begin{cases} x^2 = y \\ (y - y_0)^2 + (x - x_0)^2 = r^2 \end{cases}$$

pri čemu je

$$y_0 = \frac{1-p}{2}, \quad x_0 = -\frac{q}{2}, \quad \text{i} \quad r^2 = y_0^2 + x_0^2 - s.$$

Koristeći se ovim metodom rešiti grafički jednačinu

$$x^4 - 3x^2 - 8x - 29 = 0$$

sa tačnošću od 0,1.

172*. Primenom metoda navedenog u zad. 171 dokazati da se, uvodeći dopunsku zamenu $x = x' + \alpha$, nalaženje realnih korena jednačine 4-og stepena $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ grafičkim putem može svesti na određivanje presečnih tačaka nekog kruga i parabole $y = x^2$.

Koristeći se ovim postupkom rešiti grafički jednačinu

$$x^4 + 1{,}2x^3 - 22x^2 - 39x + 31 = 0.$$

Računanje izvoditi sa tačnošću od 0,1

173. Uzimajući da je $e \approx 2{,}718$ naći grafičkim putem koren jednačine

$$e^x \cdot \sin x = 1$$

koji leži u intervalu (0,10), i izvesti približan opšti obrazac koji daje vrednosti ostalih korena. Računati sa tačnošću od 0,01.

174. Rešiti grafički sistem jednačina

$$x + y^2 = 1, \quad 16x^2 + y = 0$$

sa tačnošću od 0,01.

175. Nacrtati grafik funkcije (u polarnom koordinatnom sistemu) po njenim vrednostima koje odgovaraju vrednostima polarnog ugla φ sa razlikom od $\frac{\pi}{12}$ između svake dve uzastopne od njih.

1) $\rho = a\varphi$ (Arhimedova spirala);
2) $\rho = \frac{a}{\varphi}$ (hiperbolička spirala);
3) $\rho = e^{a\varphi}$ $(e \approx 2{,}718)$ (logaritamska spirala);
4) $\rho = a \sin 3\varphi$ (trolisna ruža);
5) $\rho = a \cos 2\varphi$ (četvorolisna ruža);
6) $\rho = a(1 - \cos\varphi)$ (kardioda).

Račune izvoditi sa tačnošću od 0,01; konstantu $a > 0$ izabrati proizvoljno

(Ova stranica je ostavljena prazna)

REZULTATI

1. Svi prirodni brojevi n izuzev $n=1$ i $n=2$. Ako je S zbir uglova, a n broj strana, onda je $S=\pi\,(n-2)$.

4. a) Za $x=-2$, $x=1$ i $x=6$ vrednost funkcije je 0.

b) za $x<-2$, $-2<x<1$ i $x>6$ funkcija je pozitivna, a za $1<x<6$ negativna.

6. $r=\dfrac{1}{\sqrt{\pi\cdot h}}$. **7.** $P=\dfrac{a^2-b^2}{4}\operatorname{tg}\alpha$. **8.** $b=\sqrt{25-a^2}$. **9.** $f(0)=-2$; $f(1)=-0{,}5$; $f(2)=0$; $f(-2)=4$; $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-5$; $f(\sqrt{2})=-0{,}242\ldots$, $\left|f\left(\dfrac{1}{2}\right)\right|=1$; $\varphi(0)=2$; $\varphi(1)=-0{,}5$; $\varphi(2)=0$; $\varphi(-2)=-4$; $\varphi(4)=0{,}4$; $f(-1)$ ne postoji; $\varphi(-1)$ ne postoji.

10. $f(1)=0$, $f(a)=a^3-1$; $f(a+1)=a^3+3a^2+3a$; $f(a-1)=a^3-3a^2+3a-2$; $2f(2a)=16a^3-2$.

11. $F(0)=\dfrac{1}{4}$; $F(2)=1$; $F(3)=2$; $F(-1)=\dfrac{1}{8}$; $F(2{,}5)=\sqrt{2}$; $F(-1{,}5)=\dfrac{1}{\sqrt{128}}$; $\varphi(0)=\dfrac{1}{4}$; $\varphi(2)=1$; $\varphi(-1)=\dfrac{1}{2}$; $\varphi(x)=2^{x-2}$ za $x>0$ i $\varphi(x)=2^{-x-2}$ za $x<0$; $\varphi(-1)+F(1)=1$.

12. $\psi(0)=0$; $\psi(1)=a$; $\psi(-1)=-\dfrac{1}{a}$; $\psi\left(\dfrac{1}{a}\right)=a^{\frac{1-a}{a}}$; $\psi(a)=a^{a+1}$; $\psi(-a)=-a^{1-a}$.

13. $\varphi(t^2)=t^6+1$; $[\varphi(t)]^2=t^6+2t^3+1$.

20. $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ predstavlja tanges ugla između sečice koja prolazi kroz tačke $(a, f(a))$ i $(b, f(b))$, i pozitivnog smera x-ose.

22. a) $x_1=0$, $x^2=2$; b) $x_1=-1$, $x_2=3$.

23. $x_1=-2$, $x_2=5$, $x_3=-\dfrac{1}{2}$.

24. Jedan koren će uvek biti $x=a$.

25. 4 i -2; -2, 2, 4, 10.

26. $x_1=-3$, $x_2=-2$, $x_3=2$, $x_4=4$.

27. $x\leqslant -1$ i $x\geqslant 2$. **28.** $a=4$, $b=-1$.

29. $a=-\dfrac{1}{2\sin 0{,}5}\approx -1{,}04$ (uzimajući da je $\sin 0{,}5\approx 0{,}48$); $b=1$; $c=-\dfrac{1}{2}+2k\pi$ ili $a=\dfrac{1}{2\sin 0{,}5}\approx 1{,}04$; $b=-1$; $c=\dfrac{1}{2}+(2k+1)\pi$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

30. $y=(x+1)^2$. 31. $y=\left|\dfrac{1}{\cos x}\right|$. 32. $y=\sqrt[3]{(a^t+1)^2}$.

33. $u=\sqrt{1+(\lg\sin x)^2}$. 34. $v=\sin(1+x)$.

35. 1) $y=v^3$, $v=\sin x$; 2) $y=\sqrt[3]{v}$, $v=u^2$, $u=x+1$; 3) $y=\lg v$, $v=\operatorname{tg} x$; 4) $y=u^3$, $u=\sin v$, $v=2x+1$; 5) $y=5^u$, $u=v^2$, $v=3x+1$.

36. a) $-\dfrac{3}{8}$; b) 0; c) $\sin 12$; d) $=\sin 2x\cos^2 2x$; e) $x^9-3x^7+3x^5-2x^3+x$; f) 0; g) $\sin(2\sin 2x)$.

38. $y=\pm\sqrt{1-x^2}$; 2) $y=\pm\dfrac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$; 3) $y=\sqrt[3]{a^3-x^3}$; 4) $y=\dfrac{C}{x}$; 5) $y=\dfrac{\log_2 5}{x}$; 6) $y=\dfrac{10000}{x}-1$; 7) $y=\log_2(x^3+7)-\log_2(x^2-2)-x$; 8) $y=\pm\arccos\dfrac{x^2}{1+x}+2k\pi$, pri čemu je k ceo broj.

39*. Za $x>0$ i $y>0$ dobijamo: $y+y-x-x=0$, odnosno $y=x$ (grafik je simetrala prvog kvadranta). Za $x>0$ i $y<0$ dobijamo: $y-y-x-x=0$, odnosno $x=0$ (grafik je negativni deo y-ose). Za $x<0$ i $y>0$ dobijamo: $y+y-x+x=0$, odnosno $y=0$ (grafik je negativni deo x-ose). Najzad, za $x<0$ i $y<0$ dobijamo: $y-y-x+x=0$ (identitet, — „grafik" se sastoji iz svih tačaka koje leže u trećem kvadrantu).

40.

x	1	2	3	4	5	6
y	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{120}$	$\frac{1}{720}$

41.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
u	0	1	2	2	3	3	4	4	4	4	5	5	6	6	6	6	7	7	8	8

42.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
u	0	0	0	1	0	2	0	2	1	2	0	4	0	2	2	3	0	4	0	4

43. Ako je $f(x)$ težina parčeta AM, onda je

$$f(x)=\begin{cases} 2x & \text{za}\quad 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 2+\dfrac{3}{2}(x-1) & \text{za}\quad 1<x\leqslant 3,\\ x+2 & \text{za}\quad 3<x\leqslant 4;\end{cases}$$

Funkcija je definisana za $0\leqslant x\leqslant 4$.

44. $$S(x)=\begin{cases}\pi(2R-x)^2 & \text{za}\quad 0\leqslant x\leqslant R,\\ \pi R^2 & \text{za}\quad R<x\leqslant 3R,\\ \pi(6Rx-x^2-8R^2) & \text{za}\quad 3R<x\leqslant 4R.\end{cases}$$

Izvan intervala $[0,4R]$ funkcija $S(x)$ nije definisana.

45. $V=\pi x\left(R^2-\frac{x^2}{4}\right)$; $0<x<2R$.

46. $M=\frac{\pi x^2}{2R}\sqrt{4R^2-x^2}$; $0<x<2R$.

47. 1) $x>0$; 2) $x>-3$; 3) $x\leqslant\frac{5}{2}$; 4) $x\leqslant 0$; 5) sva brojna osa izuzev tačaka $x=\pm 1$; 6) sva brojna osa; 7) nije definisana samo u tačkama $x=0$, $x=-1$ i $x=1$; 8) sva brojna osa izuzev tačaka $x=1$ i $x=2$; 9) $-1\leqslant x\leqslant 1$; 10) sve $x<0$ i sve $x>4$; 11) sve $x\leqslant 1$ i sve $x\geqslant 3$; 12) sve $x<1$ i sve $x>2$; 13) $-4\leqslant x\leqslant 4$; 14) $1\leqslant x\leqslant 3$; 15) $0\leqslant x\leqslant 1$; 16) $-\frac{3}{2}\leqslant x\leqslant\frac{5}{2}$; 17) $0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$; 18) $-1\leqslant x\leqslant 1$; 19) $x<0$; 20) funkcija nije definisana ni u jednoj tački; 21) $1\leqslant x\leqslant 4$; 22) $2k\pi<x<(2k+1)\pi$, pri čemu je k ceo broj; 23) $2k\pi\geqslant x\leqslant(2k+1)\pi$, pri čemu je k ceo broj; 24) sve $x>0$ isuzev $x=1$.

48. $-2\leqslant x<1$ izuzev $x=0$; 2) $-1\leqslant x\leqslant 3$; 3) $1\leqslant x<4$; 4) sve $x>\frac{3}{2}$ izuzev $x=2$; 5) oblast definisanosti se sastoji samo iz jedne tačke $x=1$; 6) $-1<x<0$ i sve $x>1$, izuzev $x=2$; 7) $3-2\pi<x<3-\pi$ i $3<x\leqslant 4$; 8) $-4\leqslant x\leqslant-\pi$ i $0\leqslant x\leqslant\pi$; 9) $2k\pi<x<(2k+1)\pi$, pri čemu je k ceo broj; 10) $4<x<5$ i $x>6$; 11) funkcija nije nigde definisana; 12) $-1<x\leqslant 1$ i $2\leqslant x<3$; 13) sva brojna osa; 14) $4\leqslant x\leqslant 6$; 15) $2<x<3$.

49. 1) Da; 2) identične za sve $x\neq 0$; 3) identične za sve $x\geqslant 0$; 4) identične za sve $x>0$.

50. Na primer: $f(x)=\sqrt{4-x^2}$; 2) na primer: $g(x)=\frac{1}{x\sqrt{4-x^2}}$; 3) na primer: $u(x)=\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x-4}$.

51. 1) $1<x\leqslant 3$; 2) $x\geqslant 0$ za dve grane i $x\geqslant 1$ za druge dve grane.

52. Sva brojna osa.

53. 1) $y(x)>0$ za $x>2$, $y(x)<0$ za $x<2$, $y(x)=0$ za $x=2$; 2) $f(x)>0$ za $x<2$ i za $x>3$; $f(x)<0$ za $2<x<3$; $f(x)=0$ za $x_1=2$ i za $x_2=3$; 3) $g(x)>0$ za sve x, funkcija nema nulâ; 4) $h(x)>0$ u intervalima $(0;1)$ i $(2;+\infty)$, $h(x)<0$ u intervalima $(-\infty;0)$ i $(1;2)$; $h(x)=0$ za $x_1=0$, $x_2=1$ i $x_3=2$; 5) $u(x)>0$ za sve $x\neq 0$, $u(x)=0$ za $x=0$.

54. 1), 3), 8), 10), 11), 15) — parne; 5), 6), 9), 12), 14), 17) — neparne; 2), 4), 7), 13), 16) — ni parne ni neparne.

55. 1) $g(x)=(x^2+2)+3x$; 2) $h(x)=(1-x^4)+(-x^3-2x^5)$; 3) $w(x)=(\sin 2x+\operatorname{tg} x)+\cos\frac{x}{2}$.

57. 1) $u(x)=\frac{a^x+a^{-x}}{2}+\frac{a^x-a^{-x}}{2}$;

2) $v(x)=\frac{(1+x)^{100}+(1-x)^{100}}{2}+\frac{(1+x)^{100}-(1-x)^{100}}{2}$

59. Funkcije 1), 5), 6), 8).

60. Grafike vidi na sl. 80 i 81.

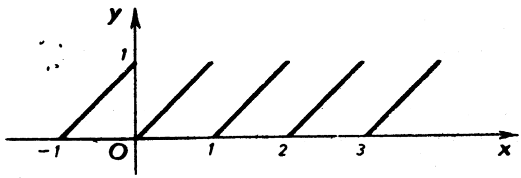
61. 1) U intervalu $(-\infty, 0)$ opada, u intervalu $(0,+\infty)$ raste; 2) u intervalu $(-\infty, 0)$ opada, u intervalu $(0,+\infty)$ ima konstantnu vrednost — nulu.

62. 1) Najveća vrednost $=1$, najmanja $=0$; 2) najveća $=1$, najmanja $=-1$; 3) najveća $=2$, najmanja $=0$; 4) najveće vrednosti — nema, najmanja $=1$.

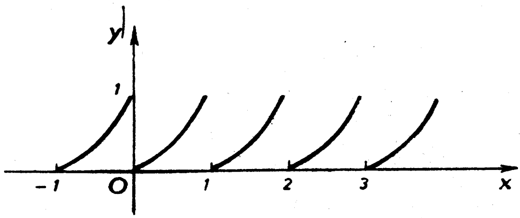
65. $I=\frac{E}{3}$. **66.** a) $p=0{,}727\,h$; b) $10{,}5\ g/cm$; c) $36{,}4\ cm$. **67.** $F=\frac{8}{45}w$.

68. 1) $y=\frac{2}{3}x+4$; 2) $y=1{,}195x+1{,}910$; 3) $y=-0{,}57x+8{,}63$.

69. a) $V=100+0{,}35t$; b) $100\ cm^3$. **70.** $S=16{,}6+1{,}34t$. **71.** $V=12-0{,}7t$.



Sl. 80



Sl. 81

72. $\Delta y=6$. **73.** $\Delta y=-6$. **74.** $\Delta x=4$.

75. Konačna vrednost argumenta je $x_2=2a$.

76. $x=3$; pri grafičkom rešavanju traži se tačka preseka grafika funkcije $y=\varphi(x)$ i prave $y=2x-4$.

78*. Treba obratiti pažnju na to da je iz relacije $|f(x)+\varphi(x)|\leqslant|f(x)|+|\varphi(x)|$, koja inače uvek važi, u našem zadatku znak jednakosti isključen; prema tome, da bi nejednakost u zadatku mogla biti zadovoljena funkcije $f(x)$ i $\varphi(x)$ moraju imati različite znake; razmatranjem dve mogućnosti, dobijamo $x<3$ i $x>4$. Zadatak se može rešiti crtanjem grafika funkcijâ $\Phi(x)=|f(x)+\varphi(x)|$ i $\psi(x)=|f(x)|+|\varphi(x)|$.

79. $x<2$. Vidi objašnjenje uz rešenje zadatka 78*.

82. $$y=\begin{cases} 0 & \text{u intervalu } (-\infty;\ -3), \\ -\frac{5}{9}x^2+5 & \text{u intervalu } [-3;\ 3], \\ \frac{2}{3}x-2 & \text{u intervalu } [3;\ 6]. \end{cases}$$

83. 1) $y=-\frac{7}{8}$ za $x=\frac{1}{4}$; 2) $y=\frac{17}{4}$ za $x=-\frac{3}{2}$; 3) $y=5$ za $x=0$; 4) $y=-\frac{7a^2}{8}$ za $x=\frac{a}{4}$; 5) $y=\frac{a}{4b^2}$ za $x=\frac{a}{2b^2}$.

84. 1) $y=-6$ za $x=-2$; 2) $y=0{,}31875$ za $x=\frac{3}{8}$; 3) $y=\frac{5}{8}$ za $x=\frac{1}{4}$; 4) $y=-a^4$ za $x=0$; 5) $y=-\frac{9}{4}b^2$ za $x=\frac{b}{2a}$.

85. $a=\frac{a}{2}+\frac{a}{2}$. **86.** $a=\frac{a}{2}+\frac{a}{2}$. **87.** $4\ m$. **88.** $50\ cm$.

89. Onaj čiji je osovinski presek kvadrat.

90. Što je veća visina konusa tim je veća površina njegova omotača; najveću vrednost ova površina dostiže kad je poluprečnik osnove konusa $= \frac{P}{4}$, tj. kad konus degeneriše u kružnu ploču.

91. 12,5 *cm*.

92. Visina pravougaonika mora biti jednaka polovini visine trougla.

93. Poluprečnik cilindra mora biti jndnak polovini poluprečnika konusa.

94. Za $H>2R$ poluprečnik cilindra mora biti $= \frac{RH}{2(H-R)}$; za $H \leqslant 2R$ ukupna površina upisanog cilindra biće tim veća što je veći poluprečnik njegove osnove.

95. $\frac{P}{2}$. **96.** $a = \frac{P}{6-\sqrt{3}}$. **97.** $\frac{4}{\pi+4}$.

98. 10 *cm*. **99.** 10 *cm*.

100. Dužina stranice trougla mora biti $\frac{3a}{9+4\sqrt{3}}$ *cm*.

101. Tražena tačka je $\left(\frac{b}{6}, \frac{b}{6}\right)$.

102. Tražena tačka je $\left(\frac{15}{11}, \frac{37}{11}\right)$.

104. 1) $x_1 \approx -1,1$, $x_2 \approx 2,1$; 2) $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{5}{2}$; 3) $x_1 \approx 0,5$, $x_2 \approx 4,1$; 4) $x_1 = x_2 = \frac{3}{2}$; 5) nema realnih korena.

105. $x_1 = -3$, $x_2 = 8$. Kod grafičkog rešavanja traži se tačka preseka grafika funkcije $\varphi(x)$ i parabole $y^2 = 7x + 25$.

106. Ako je $b^2-4ac>0$ i $a>0$ funkcija je definisana svuda osim u intervalu $[x_1, x_2]$, pri čemu su x_1 i x_2 nule trinoma. Ako je $b^2-4ac>0$ i $a<0$ funkcija je definisana samo za $x_1<x<x_2$. Ako je $b^2-4ac<0$ i $a>0$ funkcija je definisana za sve realne vrednosti x. Ako je $b^2-4ac<0$ i $a<0$ funkcija nije definisana ni za jednu realnu vrednost x. Najzad, ako je $b^2-4ac=0$, funkcija je definisana svuda osim za $x = -\frac{b}{2a}$ ako je $a>0$, i nije definisana nigde ako je $a<0$.

107. $f(x+1) = 2x^2 + 5x + 3$.

108*. Neka je $\frac{x^2+2x+c}{x^2+4x+3c} = m$, gde je m proizvoljan realan broj; tada je $(m-1)x^2 + 2(2m-1)x + c(3m-1) = 0$. Argumenat x mora biti realan broj, i prema tome $(2m-1)^2 - (m-1)(3mc-c) \geqslant 0$, odnosno: $(4-3c)m^2 + 4(c-1)m - (c-1) \geqslant 0$; a pošto je m proizvoljan realan broj, to poslednja nejednakost može važiti samo pod uslovom da je istovremeno

$$\begin{cases} 4-3c>0, \\ 4(c-1)^2 + (4-3c)(c-1) \leqslant 0; \end{cases}$$

109. $pv = 1748$.

110. Promenljiva x je obrnuto proporcionalna veličini v.

111. Promenljiva x je proporcionalna veličini v.

112. Količina materije koja se izdvaja na elektrodi obrnuto je proporcionalna zapremini rastvarača.

114. 1) za $x=1$, $y=4$ — najveća vrednost;

za $x=5$, $y=\frac{4}{5}$ — najmanja vrednost;

2) za $x=-1$, $y=\frac{1}{7}$ — najveća vrednost;

za $x=2$, $y=-2$ — najmanja vrednost;

3) za $x=0$, $y=1$ — najveća vrednost;

za $x=4$, $y=-\frac{3}{5}$ — najmanja vrednost;

117. 1) $x=y$; 2) $x=\frac{y}{2}$; 3) $x=\frac{1-y}{3}$; 4) $x=-\sqrt{y-1}$ za $x<0$, i $x=\sqrt{y-1}$ za $x\geqslant 0$;

5) $x=\frac{1}{y}$; 6) $x=\frac{y-1}{y}$; 7) $x=1-\sqrt{y+1}$ za $x<1$, i $x=1+\sqrt{y+1}$ za $x\leqslant 1$;

8) $x=-\sqrt{y^3-1}$ za $x<0$, i $x=\sqrt{y^3-1}$ za $x>0$; 9) $x=\lg\frac{y}{10}$;

10) $x=-2+10^{y-1}$; 11) $x=2^{\frac{1}{y}}$; 12) $x=\lg_2\frac{y}{1-y}$; 13) $x=\frac{1}{2}\lg\frac{y}{2-y}$;

14) $x=\frac{1}{3}\arcsin\frac{y}{2}+\frac{2k\pi}{3}$ za $\frac{4k-1}{6}\pi<x<\frac{4k+1}{6}\pi$, i $x=-\frac{1}{3}\arcsin\frac{y}{2}+$

$+\frac{2k+1}{3}\pi$ za $\frac{4k+1}{6}\pi<x<\frac{4k+3}{6}\pi$, pri čemu je k ceo broj;

15) $$x=\frac{1+\arcsin\frac{y-1}{2}}{1-\arcsin\frac{y-1}{2}} \quad \text{za } -\infty<x<\frac{2+\pi}{2-\pi} \text{ i } \frac{2-\pi}{2+\pi}<x<\infty;$$

$$x=\frac{1+\arcsin\frac{y-1}{2}+2k\pi}{1-\arcsin\frac{y-1}{2}-2k\pi} \quad \text{za } \frac{2+(4k-1)\pi}{2-(4k-1)\pi}<x<\frac{2+(4k+1)\pi}{2-(4k+1)\pi},$$

$$k=\pm1,\ \pm2,\ \ldots;\ x=\frac{1-\arcsin\frac{y-1}{2}+(2k+1)\pi}{1+\arcsin\frac{y-1}{2}-(2k+1)\pi} \quad \text{za } \frac{2+(4k+1)\pi}{2-(4k-1)\pi}<x<$$

$$<\frac{2+(4k+3)\pi}{2-(4k+3)\pi},\ k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots;$$

16) $x=-\cos\frac{y}{4}$ za $0<y<2\pi$ i $-1<x<0$; $x=\cos\frac{y}{4}$ za $0<y<2$ i $0<x<1$.

122. $1<x<3$; $x=1+2^{1-y^2}$.

123. $x=\arcsin\sqrt[3]{y-y^2+2}+2k\pi$ za $\frac{4k-1}{2}\pi<x<\frac{4k+3}{2}\pi$ i $x=-\arcsin\sqrt[3]{y-y^2+2}+$

$+(2k+1)\pi$ za $\frac{4k+1}{2}\pi<x<\frac{4k+3}{2}\pi$ (oblast definisanosti ovih funkcija je

$\frac{1-\sqrt{13}}{2}<y<\frac{1-5}{2}$ i $\frac{1+\sqrt{5}}{2}<y<\frac{1+\sqrt{13}}{2}$).

125. $x_1\approx -0{,}5$, $x_2=1$, $x_3\approx 54{,}5$.

126*. 1) $x_1=1{,}4$. ostali koreni su kompleksni; x_1 je apscisa presečne tačke krivih $y=x^3$ i $y=-x+4$;

2) $x_1=1$, $x_2=-1$, $x_3=3$; celishodno je uvesti zamenu $x=x'+\alpha$ i izabrati α tako da koeficijenat uz x'^2 bude $=0$; dalji rad je kao i u zad. 1); 3) $x_1=4$, $x_2=x_3=1$; vidi uputstvo uz zadatak pod 2); 4) $x_1=-1$, ostali koreni su kompleksni; vidi uputstvo uz zad. 2).

127. 1) 1,465...; 2) $\approx 14{,}26$ *cm*; 3) $\approx 6{,}8$ *cm*.

128. Za $y_1=x^n$ inverzna funkcija (sa istom oznakom x njenog argumenta) je $y_2=\sqrt[n]{x}$, tako da:

ako je	$n>1$	onda je za	$0<x<1$	$y_1<y_2$,	a za $x>1$ je	$y_1>y_2$,
,,	$0<n<1$	,, ,,	,,	$y_1>y_2$	,, ,,	$y_1<y_2$,
,,	$-1<n<0$	,, ,,	,,	$y_1<y_2$	,, ,,	$y_1>y_2$,
,,	$n<-1$	,, ,,	,,	$y_1>y_2$	,, ,,	$y_1<y_2$.

133. $x_1=1$, $x_2=2$.

134. Tačke preseka su: (1, 2); (3, 8); $\left(3,\ \frac{4}{3}\right)$; ($-1{,}5$; 0,3).

135. $n=15$.

136. Polazeći od definicije hiperboličkih funkcija može se dokazati da je: $\operatorname{sh}(-x)=-\operatorname{sh}x$, $\operatorname{th}(-x)=-\operatorname{th}x$, $\operatorname{ch}(-x)=\operatorname{ch}x$. Ove funkcije nisu periodične.

140. $y_{\min}\approx 0{,}8$ za $x\approx 0{,}4$. **141.** $y=\frac{a^x-a^{-x}}{2}$.

143. 1) $A=1$, $T=\frac{2}{3}\pi$; 2) $A=5$, $T=\pi$; 3) $A=4$, $T=2$;

4) $A=2$, $T=4\pi$; 5) $A=1$, $T=\frac{8}{3}$; 6) $A=3$, $T=\frac{16}{5}\pi$.

144. 1) 2; $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{3}{2\pi}$; 5; 2) 1; 4π; $\frac{1}{4\pi}$; $\frac{3\pi-1}{2}$; 3) $\frac{1}{3}$; 1; 1; $-\frac{\pi}{3}$;

4) 1; $6\pi^2$; $\frac{1}{6\pi^2}$; $\frac{1}{2\pi}$.

146. Oblast definisanosti je $(0,\pi)$. Površina će biti najveća za $x\approx\frac{\pi}{2}$.

147. $x=R\sin\left(\frac{vt}{R}+\frac{\pi}{2}+\arccos\frac{a}{R}\right)$.

148. $y=\sin\left[\frac{t-t_0}{t_1-t_0}(\arcsin y_1-\arcsin y_0)+\arcsin y_0\right]$;

$$T=\frac{2\pi(t_1-t_0)}{\arcsin y_1-\arcsin y_0};\quad \varphi_{\text{poč}}=\frac{t_1\arcsin y-t_0\arcsin y_1}{t_1-t_0}$$

149. $x = R(1-\cos\varphi) + a - \sqrt{a^2 - R^2\sin^2\varphi}$, gde je $\varphi = 2\pi nt$.

151. 1) $x_1 = 0$, $x_{2,3} \approx \pm 1{,}9$; 2) $x - 0$; $\pm 4{,}5$; $\pm 7{,}72$; dalje sa dovoljno velikom tačnošću može se uzeti da je $x \approx \pm \dfrac{(2n+1)\pi}{2}$, $(n > 3)$; 3) $x \approx 0{,}74$; 4) $x_1 = 0{,}9$, $x_2 = 2{,}85$, $x_3 = 5{,}8$; 5) ima beskonačno mnogo korena; $x_1 = 0$, x_2 nešto manji od $\dfrac{\pi}{2}$, x_3 nešto veći od $\dfrac{3\pi}{2}$ itd.
odavde sledi: $0 \leqslant c \leqslant 1$, no kako je prema uslovima zadatka $c \neq 0$, to je definitivno $0 < c \leqslant 1$.

155*. 1) Period je $\dfrac{\pi}{2}$. U intervalu $[0; 2\pi]$ funkcija može biti predstavljena ovako:

$$y = \begin{cases} \sin x + \cos x & \text{u intervalu } \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right], \\ \sin x - \cos x & \quad ,, \quad \left[\dfrac{\pi}{2}; \pi\right], \\ -\sin x - \cos x & \quad ,, \quad \left[\pi; \dfrac{3\pi}{2}\right], \\ -\sin x + \cos x & \quad ,, \quad \left[\dfrac{3\pi}{2}, 2\pi\right]; \end{cases}$$

2) Period je 2π. U intervalu $[0; 2\pi]$ funkcija može biti predstavljena ovako

$$y = \begin{cases} \operatorname{tg} x & \text{u intervalu } \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right], \\ 0 & \quad ,, \quad \left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right], \\ -\operatorname{tg} x & \quad ,, \quad \left[\pi, \dfrac{3\pi}{2}\right], \\ 0 & \quad ,, \quad \left[\dfrac{3\pi}{2}, 2\pi\right]. \end{cases}$$

156. 1) Oblast defisanosti se sastoji iz beskonačno mnogo intervala oblika $(2n\pi, (2n+1)\pi)$, gde je $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; funkcija nije ni parna ni neparna; periodična je sa primitivnim periodom 2. U intervalu $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ sinus raste od 0 do 1, i prema tome vrednost funkcije $\lg \sin x$ je negativna i raste do 0; u intervalu $\left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$ sinus opada od 1 do 0, i prema tome opada i funkcija $\lg \sin x$; u intervalu $(\pi, 2\pi)$ vrednosti sinusa su negativne, tako da funkcija $\lg \sin x$ nije definisana.

2) Oblast definisanosti se sastoji iz izolovanih tačaka oblika $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$, gde je $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ U ovim tačkama je $y = 0$. Grafik se sastoji iz izolovanih tačaka na apscisnoj osi.

3) Funkcija je definisana svuda izuzev u tačkama $x = \pi n$, gde je $n = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$

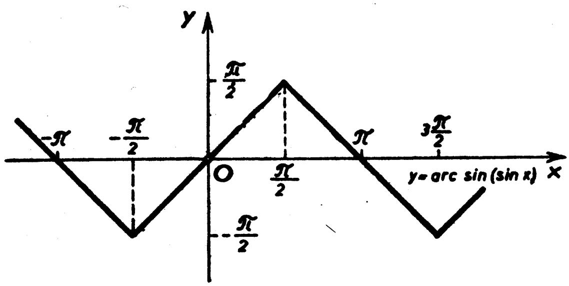
158. $\omega = 2 \arcsin \dfrac{\alpha}{2\pi}$. **159.** $\gamma = \operatorname{arctg} \dfrac{a(l\cos\varphi + b\sin\varphi)}{b^2 + l^2 + a(b\cos\varphi - l\sin\varphi)}$.

160. $\alpha = \arccos\left[1 - \dfrac{x(2a-x)}{2R(a+R-x)}\right]$.

161. 1) $-2<x<1$;
2) $0<x<1$; 3) $0<x<1$; 4) $-1<x<0$; 5) $0<x<\infty$;
6) $-\infty<x<1$; 7) $0<x<\infty$; 8) $-\infty<x<0$;
9) $-\infty<x<1$; 10) $1<x<\infty$.

162. 1) $-1<x<1$; 2) $0<x<1$; 3) $-\infty<x<\infty$; 4) definisana svuda osim za $x=0$

163* Period je 2π. Grafik je prikazan na sl. 82. Uputstvo. U intervalu $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ je $y=\arcsin(\sin x)=x$ po definiciji funkcije $\arcsin x$. Da bismo dobili grafik funkcije u intervalu $\frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2}$ stavimo $z=x-\pi$, pa je tada $x=\pi+z$, $-\frac{\pi}{2}<z<\frac{\pi}{2}$, i prema tome $y=$ $=\arcsin(\sin x)=\arcsin\sin(z+\pi)=-\arcsin(\sin z)=-z$; dakle: $y=\pi-x$, itd.



Sl. 82

167. $y_{max}\approx 5{,}5$; funkcija od rastuće prelazi na opadajuću u tački $x=-2$. Nula funkcije je $x\approx -3{,}6$.

169. $y=\frac{1}{32}(267-10x-x^2)$ ili $y=-0{,}0312x^2-0{,}312x+8{,}344$; nule funkcije su: $x_1\approx -22{,}09$, $x_2\approx 12{,}09$. Da bismo dobili korene sa tačnošću do 0,01 treba vrednosti koeficijenata uzeti sa tačnošću do 0,0001.

170. $x_1\approx 2{,}60$ *cm*, $x_2\approx 7{,}87$ *cm*.

171. $x_1\approx -2{,}3$, $x_2\approx 3$; ostali koreni su imaginarni.

172*. Izabrati α tako da vrednost koeficijenta uz x'^3 bude nula; $x_1\approx -3{,}6$, $x_2\approx -2{,}9$, $x_3\approx 0{,}6$, $x_4\approx 4{,}8$.

173. $x_1\approx 0{,}59$; $x_2\approx 3{,}10$; $x_3\approx 6{,}29$; $x_4\approx 9{,}43$; uopšte $x\approx \pi n\ (u>2)$.

174. $x_1\approx -0{,}57$, $y_1\approx -1{,}26$; $x_2\approx -0{,}42$, $y_2\approx 1{,}19$; $x_3\approx 0{,}46$, $y_3\approx 0{,}74$; $x_4\approx 0{,}54$, $y_4\approx -0{,}68$.